Problemas con perdida de compacidad.

Ganar compacidad: usando pesos

Sea $V \in C(\mathbb{R}^n)$ tal que $V(x) \geq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\lim_{|x|\to+\infty} V(x) = +\infty$.
Consideramos el espacio

$$H := \Big\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ tal que } \|u\|_H^2 := \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + Vu^2\, dx < \infty \Big\}.$$

1. Verificar que H es un espacio de Hilbert y que $H \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $p \in [2, 2^*]$.
2. Probar que las inyecciones $H \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ son compactas para todo $p \in [2, 2^*)$.
   Sug: basta probar que para todo $\delta > 0$, existe $M > 0$ tal que
   $$\int_{\{|x|\geq M\}} |u|^p\, dx < \delta \qquad \text{para todo } u \in H,\ \|u\|_H \leq 1.$$
3. Dado $p \in (2, 2^*)$, deducir la existencia de $u \in C^\infty(U) \cap H$, $u > 0$, solución de
   $$\Delta u + Vu = u^{p-1}, \qquad \text{en } \mathbb{R}^n.$$
   ¿Que pasa para $p = 2$?

Ganar compacidad: usando la simetría (lema de Strauss) - ver [1]

Notamos $H_r^1(\mathbb{R}^n)$ el subespacio de $H^1(\mathbb{R}^n)$ de las funciones radiales. Si u es radial, notamos $\tilde{u} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $u(x) = \tilde{u}(|x|)$.

1. Verificar que si $u \in H_r^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\tilde{u} \in C^{0,1/2}((0, +\infty))$.
2. Vamos a probar que existe $C_n > 0$ tal que toda función $u \in H_r^1(\mathbb{R}^n)$ tiene el siguiente decaimiento:
   $$|u(r)| \leq C_n r^{1-n/2} \|u\|_{H^1} \qquad \text{para todo } r \geq 1. \tag{1}$$

a) Explicar porque basta probar (1) para $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ radial.

b) Probar (1) integrando en $[R, +\infty)$, $R > 0$, la desigualdad $(r^{n-1}u)' \geq 2r^{n-1}uu'$ (donde $' = \frac{d}{dr}$).

3. Deducir que la inyección $H_r^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ es compacta para $2 < p < 2^*$.
Sug: basta probar que para todo $\epsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que $\int_{\{|x| \geq R\}} |u|^q \, dx \leq \epsilon$ para toda $u \in H_r^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|u\| \leq 1$.

4. Probar que las inyecciones $H_r^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p = 2, 2^*$ no son compactas.
Sug: si la inyeccion para $p = 2$ fuese compacta entonces Δ tendria un 1er autovalor positivo.

5. Queremos ahora probar que la ecuación

$$\Delta u + u = u^{p-1}, \tag{2}$$

con $p \in (2, 2^*)$, tiene una solución clásica radial positiva.

a) Sea J el funcional asociado. Verificar usando el 3. que existe $u \in H_r^1(\mathbb{R}^n)$, $u \geq 0$, tal que

$$DJ(u)v = 0 \quad \text{para todo } v \in H_r^1(\mathbb{R}^n).$$

Falta probar que eso vale para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$.

b) Notamos $\nabla J(u) \in H^1(\mathbb{R}^n)$ el vector tal que $DJ(u)v = (\nabla J(u), v)_{H^1}$. Verificar que $\nabla J(u) = u - i^*(|u|^{p-2}u)$ donde $i : H^1 \hookrightarrow L^p$ y $i^* : L^{p'} \to H^{-1} \sim H^1$.

c) Dado $\sigma \in O(n)$ y $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, notamos $v_\sigma(x) := v(\sigma^{-1}x)$. Verificar que para todo $v, w \in H^1$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\nabla w_\sigma, \nabla v) = \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla w, \nabla v_{\sigma^{-1}}),$$

y luego que $(w_\sigma, v)_{H^1} = (w, v_{\sigma^{-1}})_{H^1}$.

d) Recordando que $u_\sigma = u$, deducir que $(\nabla J(u))_\sigma = \nabla J(u)$, y luego que $\nabla J(u) \in H_r^1(\mathbb{R}^n)$.

e) Deducir que $\nabla J(u) = 0$.
nota: otra manera de llegar a $DJ(u)v = 0$ para todo $v \in H^1$ consiste en considerar el simetrizado $\bar{v}(x) := \int_{O(n)} v(\sigma^{-1}x) \, dm(\sigma)$ de v, donde m es la medida de Haar de $O(n)$ normalizada por $m(O(n)) = 1$ (m existe porque $O(n)$ es un grupo compacto). Se escribe luego usando el item c) que

$$0 = DJ(u)\bar{v} = \int_{O(n)} DJ(u)v \, dm(\sigma) = DJ(u)v.$$

Nota: 1) como u es radial, la ecuacion (3) es una EDO. Jugando un poco con ella, se puede probar que u decae exponencialmente rapidamente al ∞ (ver [1])
2) con la misma idea se puede probar la existencia de soluciones invariantes bajo el accion de un subgrupo de $O(n)$ (ver [5], [3], [4])

Problema con exponente subcrítico en $\mathbb{R}^n$ - ver [5]

Consideramos la ecuacion

$$\Delta u + u = Q(x)|u|^{p-2}u \quad \text{ en } \mathbb{R}^n$$

donde $p \in (2, 2^*)$ y $Q \in C(\mathbb{R}^n)$ verifica $Q \geq 1$ y $\lim_{|x|\to+\infty} Q(x) = 1$. Note que se podria reemplazar 1 por cualquier numero positivo. Cuando $Q \equiv 1$ ya sabemos que esta ecuacion tiene una solucion clasica positiva radial que decae exponencialmente rapidamente al ∞. Por lo tanto supondremos $Q \not\equiv 1$.

Notamos

$$S = \inf_{\int_{\mathbb{R}^n} Q|u|^p = 1} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + u^2 = \inf \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + u^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} Q|u|^p\right)^{\frac{2}{p}}}$$

el problema de minimizacion asociado, y

$$S_\infty = \inf \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + u^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p\right)^{\frac{2}{p}}}$$

el problema al ∞.

1. Probar que $S < S_\infty$.
2. Sea u_k una sucesion minimizante para S es decir
$$\int_{\mathbb{R}^n} Q|u_k|^p = 1 \quad \text{ y } \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + u^2 = S + o(1).$$
Probar que $u_k \to u$ (para una subsucesion) en un sentido que se precisara.
3. Aplicando el 1er principio de concentracion-compacidad de Lions (de la misma manera que se uso en clase para S_∞), verificar que ocurre la compacidad: existen puntos $x_k \in R^n$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe un $R > 0$ tal que $\int_{B_{x_k}(R)} Q|u|^p > 1 - \epsilon$.
4. Verificar que $|x_k| \leq C$ y luego que $\int_{\mathbb{R}^n} Q|u|^p = 1$. Deducir que u es una extremal para S.

Problemas con exponente crítico

Problema crítico con perturbacion subcritica

Consideremos la ecuación

$$\begin{aligned} \Delta u = |u|^{2^*-2}u + \lambda |u|^{p-2}u \quad &\text{en } U \\ u = 0 \quad \text{en } \partial U \end{aligned} \tag{3}$$

donde $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, es un abierto acotado suave, $p \in (2{,}2^*)$, y $\lambda > 0$.

1. Verificar que para todo $\lambda > 0$, el funcional
$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_U |\nabla u|^2\,dx - \frac{1}{2^*}\int_U |u|^{2^*}\,dx - \frac{\lambda}{p}\int_U |u|^p\,dx, \quad u \in H_0^1(U),$$
verifica las condiciones geométricas del teorema del paso de la montaña y verifica la condición de Palais-Smale $(PS)_c$ para todo $c \in (0, \frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}})$ donde
$S := \inf_{u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} \dfrac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\,dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^*}\,dx\right)^{\frac{2}{2^*}}}$.
2. Fijamos un $v \in H_0^1(U)$, $v \not\equiv 0$. Verificar que la función $f_\lambda(t) := J_\lambda(tv)$, $t > 0$, alcanza su máximo en un único punto t_λ. Verificar que existe $C > 0$ tal que $t_\lambda \leq C\lambda^{-\frac{1}{p-2}}$ para λ grande.
3. Concluir que (3) tiene una solución no-trivial para λ grande.
4. Verificar que se puede suponer $u_k \geq 0$ y luego que $u \geq 0$. Nota: de hecho se puede probar que $u > 0$.

Problema critico para la imersion de traza - ver [2]

Consideramos la ecuación

$$\begin{aligned} \Delta u + u = 0 \quad &\text{en } U \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = |u|^{2_*-2}u \quad &\text{en } \partial U \end{aligned} \tag{4}$$

donde $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, es un abierto acotado suave y $2_* = \frac{2(n-1)}{n-2}$ es el exponente crítico para la imersión de traza de $H^1(U)$ en los espacios $L^p(\partial U)$ en el sentido que esta imersión es continua para $p \leq 2_*$ y compacta si $p < 2_*$ pero no si $p = 2_*$.
Para encontrar una solución no-trivial consideramos el problema de minimización

$$\lambda := \inf_{u \in H^1(U),\, \int_{\partial U} |u|^{2_*} = 1} \int_U |\nabla u|^2 + u^2 > 0.$$

1. Sea $(u_k)_k$ una sucesión minimizante para λ. Probar que, para una subsucesión, $u_k \to u$ (precisar el sentido de las convergencias) y que $\int_{\partial U} |u|^{2_*} \leq 1$. En el caso que $\int_{\partial U} |u|^{2_*} = 1$, verificar que u es una solución no-trivial de (4).

2. Probar que
$$\int_U |\nabla u_k|^2 = \int_U |\nabla u_k - \nabla u|^2 + \int_U |\nabla u|^2 + o(1),$$
$$1 = \int_{\partial U} |u_k|^{2_*} = \int_{\partial U} |u_k - u|^{2_*} + \int_{\partial U} |u|^{2_*} + o(1),$$
Deducir que
$$\lambda \geq \lambda \left(1 - \int_{\partial U} |u|^{2_*}\right)^{\frac{2}{2_*}} + \lambda \left(\int_{\partial U} |u|^{2_*}\right)^{\frac{2}{2_*}},$$
y finalmente que tenemos $u \equiv 0$ o $\int_{\partial U} |u|^{2_*} = 1$ con $u_k \to u$ fuerte en $H^1(U)$.

3. Sea $T > 0$ la constante óptima en la desigualdad de trazas
$$T := \inf_{v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla v|^2 \, dx}{\left(\int_{\partial \mathbb{R}^n_+} |v|^{2_*}\right)^{2/2_*}}.$$
Admitimos que para todo $\epsilon > 0$ existe una constante $C_\epsilon > 0$ tal que
$$\left(\int_{\partial U} |v|^{2_*} \, dS\right)^{2/2_*} \leq (T^{-1} + \epsilon) \int_U |\nabla v|^2 \, dx + C_\epsilon \int_U v^2 \, dx, \quad \forall\, v \in H^1(U).$$
Escribiendo esta desigualdad para u_k probar que $u \not\equiv 0$ si vale que
$$\lambda < T \tag{5}$$

4. Verificar que (5) vale si U es tal que $\frac{|U|}{|\partial U|^{\frac{2}{2_*}}} < T$ (por ejemplo ϵU con $\epsilon << 1$ verifica esta condición).

Nota:

1. Se puede probar que (5) vale si existe un punto de ∂U de curvatura media > 0 (en particular vale para cualquier dominio acotado suave): se usan funciones-test obtenidas reescalando una extremal para T (se conocen todas) haciendo que se concentren alrededor de un punto de ∂U en el que la curvatura media es > 0.

2. El mismo método funciona con la ecuación $\Delta u + \lambda u = |u|^{2^*-2} u$, $u \in H_0^1(U)$, estudiada en clase. La prueba usando el teorema del paso de la montaña tiene la ventaja de ser mas flexible (permite considerar ecuaciones con perturbacines como en el ejercicio anterior).

3. Se puede probar el análogo del 2ndo principio de concentración-compacidad para la inyección de $H^1(U)$ en $L^{2_*}(\partial U)$. La prueba es similar a la vista en clase para la inyección de $H^1(U)$ en $L^{2^*}(\partial U)$ con T al lugar de S y las masas de Dirac δ_{x_i} estan soportadas en puntos de ∂U.

Referencias

[1] A. Ambrosetti, A. Malchiodi, Nonlinear analysis and semilinear problems, Cambridge studies in advanced mathematics 104.

[2] J. Fernández Bonder and J.D. Rossi, On the existence of extremals for the Sobolev trace embedding theorem with critical exponent, Bull. London Math. Soc. 37 (2005), no. 1, 119–125.

[3] P.L. Lions, Symétrie et compacité dans les espaces de Sobolev, Journal of Functional Analysis, Volume 49, Issue 3, December 1982, Pages 315-334

[4] R. Palais, the principle of symmetric criticality, Comm. Math. Phys. Volume 69, Number 1 (1979), 19-30.

[5] M. Willem, Minimax theorem.